Acta Academiae Paedagogicae Szegediensis, 1987—1988.
Series Physica, Chemica, Mathematica, pp. 39—43.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS AZ EUKLIDESZI, AZ AFFIN ÉS A PROJEKTÍV TÉR NEVEZETES LEKÉPEZÉSEIT BIZTOSÍTÓ ALAPTÉTELEKHEZ

MISKOLCZI JÓZSEF

Az euklideszi, az affin és a projektív geometria jellemző leképezései: a hasonlóság, az affinitás és a kollineáció. E fogalmakat — az illető geometria felépítésétől függően — más-más formában szokás megadni. Ha már a szóban forgó teret bizonyos értelemben „metrizáltuk", akkor — az oktatási gyakorlatot is figyelembe véve — célszerű az alábbi analóg megfogalmazású definíciók kimondása.

Definíció. Legyen π_1, π_2 az $\left\{\begin{array}{l}\text{euklideszi}\\ \text{affin}\\ \text{projektív}\end{array}\right\}$ tér két síkja. A

$$\psi: \pi_1 \to \pi_2 (P \to \psi P)$$

bijektív leképezést $\left\{\begin{array}{l}\text{hasonlóságnak}\\ \text{affinitásnak}\\ \text{kollineációnak}\end{array}\right\}$ nevezzük, ha $\left\{\begin{array}{l}\text{aránytartó}\\ \text{osztásviszonytartó}\\ \text{kettősviszonytartó}\end{array}\right\}$. (1)

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy e definíciók a megfelelő terekre is kiterjeszthetők, továbbá az is, hogy ezen megfogalmazások „elrejtett" feltételként tartalmazzák az egyenestartást, illetve az illeszkedést (természetesen akkor, ha az (1)-gyel jelölt tulajdonságokat a szokásos klasszikus értelmezésben használjuk).

Mindhárom térben megadható egy-egy ún. alaptétel, amely lehetővé teszi a szóban forgó leképezésnek az illető térbeli generálását.

A következőkben, pl. az affin geometriában — a fontosabb lépéseket kiemelve — egy olyan utat vázolunk, amely során eljutunk az alaptételig, majd az alaptételt bizonyítjuk is.

1. Generálják az affin teret a következő alapfogalmak és axiómák.

Alapfogalmak: pont, egyenes, sík, tér, illeszkedés, elválasztás.

a) A Hilbert-féle illeszkedési és rendezési axiómák.
b) Párhuzamossági axióma.
c) Dedekind-féle folytonossági axióma.
d) Desargues-féle axióma: (COXETER [2]).

Az alábbiakban $\underset{\smile}{e} \| g$ jelöli azt, hogy az e egyenes egyező állású a g egyenessel.

2. Definíció. Legyen π affin sík. A

$$\psi_{ny}: \pi \to \pi (P \to \psi P)$$

bijektív leképezést nyújtásnak nevezzük, ha $\underset{\smile}{e} \| e$.

Egyszerűen bizonyítható, hogy egy sík két egyező állású szakasza egyetlen nyújtást határoz meg [2].

3. „Metrizáljuk" az affin teret pl. a [2]-ben leírtak szerint. Ennek során eljuthatunk az osztásviszony fogalmához is.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a különböző állású szakaszok hosszának összehasonlítása az affingeometriában értelmetlen!

4. Affinitás fogalma.

Következménye. A nyújtás speciális affinitás.

5. Az előzőekből nyilvánvalóan adódnak, illetve könnyen bizonyíthatók a kö vetkező állítások:

Az affinitások halmaza a leképezések szorzása szerint csoport. Az affinitás egyenestartó, illeszkedéstartó, rendezés- és párhuzamosságtartó. Ha egy affinitásban egy egyenesnek két fixpontja van, akkor ennek az egyenesnek minden pontja fixpont. Ha egy síkbeli affinitásnak három nem kollineáris fixpontja van, akkor ennek az affinitásnak minden pontja fixpont.

6. Definíció. Legyen π_1 és π_2 két affin sík. Ezek egybe is eshetnek. Az olyan affinitást, amelynek pontosan egyetlen t fixegyenese van és t minden pontja fixpont tengelyes affinitásnak nevezzük.

Könnyen igazolható, hogy a tengelyes affinitást a tengelye és egy a tengelyre nem illeszkedő $A, A'(A \to A')$ pontpárja egyértelműen meghatározza.

A tengelyes affinitás ezen adatokkal történő megadását a következőkben így jelöljük:

$$\psi_{a(t, A \to A')}.$$

7. Alaptétel. *Ha adott a π_1 és a π_2 affin sík, továbbá $A_i \in \pi_1$ és $A_i' \in \pi_2$ $(i=1, 2, 3)$ nem elfajuló háromszögek, akkor egy és csak egy olyan $\psi_a : \pi_1 \to \pi_2$ $(P \to \psi P)$ affinitás van, amelyre az $A_i \to A_i'$ $(i=1, 2, 3)$ teljesül.*

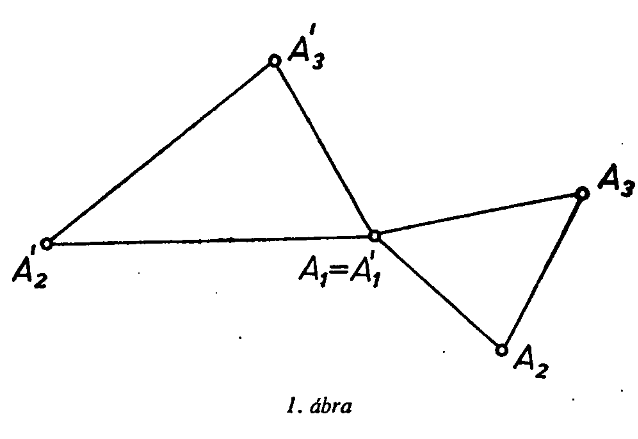
I. A létezés bizonyítása lépésekre bontva.

(1) a) Ha $\pi_1 \| \pi_2$, akkor egy nyújtással,

b) ha $\pi_1 \times \pi_2$, akkor egy tengelyes affinitással,

c) ha $\pi_1 = \pi_2$, de egyetlen $A_i \to A_i'$ pontpár sem fix,

akkor szintén egy tengelyes affinitással az 1. ábrán látható egysíkú helyzet — az eredeti jelöléseket megtartva — megvalósítható.



1. ábra

Jelölje az (1) alatti affinitást ψ_1.

(2) Legyen ψ olyan tengelyes affinitás, amelyre

$$\psi_2 \equiv \psi_{a(t, A_3 \to A_3')} \quad \text{és} \quad A_1(\equiv A_1') \in t.$$

Ekkor $\bar{A}_2 := \psi_2(A_2)$.

(3) Majd tekintsük a

$$\psi_3 \equiv \psi_{a(t(A_1' A_3'), \bar{A}_2 \to A_2')}$$

tengelyes affinitást-

Végül az (1), (2), (3)-ból a

$$\psi_3\psi_2\psi_1 = = \psi'_a$$

affinitás adódik, amelyre

$$\psi_a A_i = A_i' \quad (i = 1, 2, 3).$$

II. Az egyértelműség bizonyítása. Legyen ψ_a és ψ_a' a tétel kirovásának eleget tevő két affinitás. Tudjuk, hogy ψ_a inverze: ψ_a^{-1} is affinitás. Képezzük a $\psi_a^{-1}\psi_a'$ szorzatot. Az így kapott affinitásnak három nem kollineáris fixpontja van. Ezért az 5. pont utolsó állítása szerint:

$$\psi_a^{-1}\psi_a' = I.$$

Szorozzunk ψ_a-val,
ahonnan

$$\psi_a' = \psi_a.$$

Megjegyzés. E tétel az affin leképezésnek egy egyszerű megadási módját biztosítja. Az alaptétel a három dimenziós affin térre is kiterjeszthető. Ebben az esetben az affinitást két tetraéder határozza meg.

Térjünk át a projektív sík alaptételére.

Alaptétel. *Ha adott két projektív sík, π_1 és π_2, továbbá $A_i \in \pi_1$ és $A_i' \in \pi_2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) pontnégyesek úgy, hogy sem az A_i, sem az A_i' pontok hármanként nem kollineárisak, akkor egy és csak egy olyan $\psi_k: \pi_1 \to \pi_2$ ($P \to \psi P$) kollineáció van, amelyre az $A_i \to A_i'$ ($i=1, 2, 3, 4$) teljesül*

Itt is, mint az előzőekben — az affin geometria alaptétele esetén — pl. a [2]-ben megtalálható axiómarendszerből kiindulva a kollináció definícióján és egy sor tételen és definíción keresztül az (affin geometriában vázolt analóg utat követve) eljuthatunk az alaptételig, illetve annak bizonyításához.

Most e dolgozatban az alaptétel állításának csak az egzisztenciális részére adunk egy bizonyítást, de előtte a bizonyítás előkészítése érdekében megadjuk a centrális-axiális kollineáció definócióját, majd néhány megjegyzést fűzünk a centrális-axiális kollineációhoz. Az unicitással azért nem foglalkozunk, mert ez néhány egyszerű állítás figyelembevételével — amely állítások megfelelői az affin geometriában is megtalálhatók — formailag ugyanúgy bizonyítható, mint az affinitás alaptétele esetén.

Definíció. Az olyan kollineációt, amelynek van centruma és tengelye: C, t, centrális-axiális kollineációnak nevezzük.

Ismert, hogy $\forall e | C \in e$ esetén $e = e'$. (A centrum a tengely duálisa!) Nyilvánvaló az is, hogy a megfelelő pontokat összekötő egyenesek — $a(AA')$, $A \neq A'$ — a centrumra, a megfelelő egyenesek metszéspontjai — $a \cap a'$, $a \neq a'$ — pedig a tengelyre illeszkednek. A centrális-axiális kollineációt a centruma, tengelye és egy megfelelő tengelyre nem illeszkedő pontjára vagy C-re nem illeszkedő egyenespárja egyértelműen meghatározza.

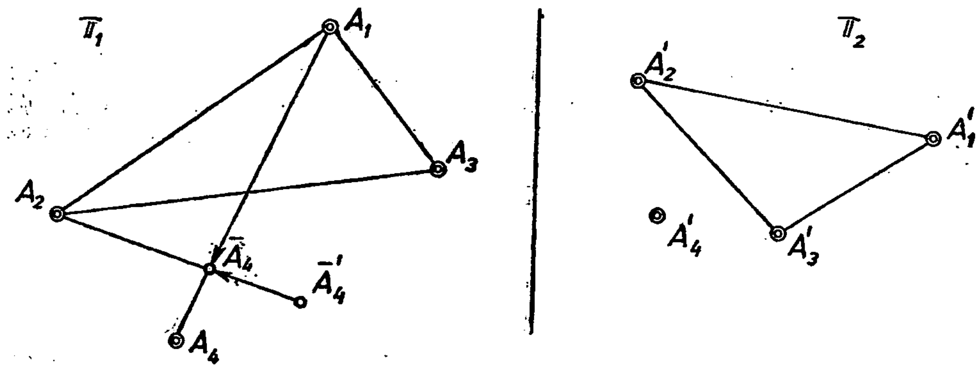
Egy centrális-axiális kollineációt az említett meghatározó adatokkal a következőkben így jelöljük:

$$\psi_{k(C,t,A\to A')}, \quad \text{illetve} \quad \psi_{k(C,t,a\to a')}.$$

Nyilván a C és a t lehet ideális is. Pl. legyen C ideális t pedig közönséges. Ez a centrális-axiális kollineáció az affin geometriában a tengelyes affinitás. Ennélfogva az alaptétel bizonyításában az a„affinitásra" támaszkodhatunk.

Ezek után következzék a kollineáció alaptételében kimondott létezés bizonyítása.

(1) Legyen $\psi_3\equiv\psi_a:\pi_2(P\to\psi P)$ az $A_1A_2A_3$ és az $A_1'A_2'A_3'$ háromszögek által meghatározott „affinitás" $(A_i\to A_i',\ A_i\in\pi_1,\ A_i'\in\pi_2,\ (i=1,2,3);$ 2. ábra).



2. ábra

Ekkor

$$\bar{A}_4' := \psi_a^{-1}(A_4').$$

(2) Legyen ψ_1 olyan kollineáció, amelyre

$$\psi_1 \equiv \psi_{k(C\equiv A_1,\, t(A_2A_3),\, A_4\to\bar{A}_4)},$$

ahol $\bar{A}_4 := e(A_1A_4)\cap g(A_2\bar{A}_4')$ és $\psi_1A_i\equiv A_i$ $(i=1,2,3)$, $\psi_1A_4\equiv\bar{A}_4$.

(3) Legyen ψ_2 olyan kollineáció, amelyre

$$\psi_2 \equiv \psi_{k(C\equiv A_2,\, t(A_1A_3),\, \bar{A}_4\to\bar{A}_4')}.$$

Ekkor

$$\psi_2A_i \equiv A_i \ (i = 1,2,3) \quad \text{és} \quad \psi_2\bar{A}_4 \equiv \bar{A}_4'.$$

Végül tekintsük a $\psi_3\psi_2\psi_1(=\psi_k)$ szorzatot, amely szintén kollineáció és amely úgy képezi le a π_1-t a π_2 síkra, hogy $\psi_3\psi_2\psi_1A_i\equiv A_i'$ $(i=1,2,3,4)$.

Befejezésül bizonyítás nélkül közöljük a hasonlósági leképezés alaptételét.

Alaptétel. *Ha adott a π_1 és π_2 euklideszi sík és mindegyikben egy-egy $\bar{\pi}_1$ és $\bar{\pi}_2$ félsík, továbbá mindkét félsík határán egy-egy A_1B_1 és A_2B_2 szakasz, akkor egy és csak egy olyan $\psi_h:\pi_1\to\pi_2$ $(P\to\psi P)$ hasonlósági leképezés (hasonlóság) van, amelyre $\bar{\pi}_1\to\bar{\pi}_2$ és $A_1\to A_2$, $B_1\to B_2$ teljesül.*

Megjegyezzük, hogy ha az ún. klasszikus háromdimenziós euklideszi teret bármelyik szokásos axiómarendszer alapján is tárgyaljuk, akkor a hasonlósági alaptétel bizonyítása analóg gondolatmenetre építhető, mint az affinitás alaptétele.

Ha pedig az affin tér bevezetése megelőzi az euklideszi tér tárgyalását, akkor a fenti megjegyzés nyilvánvaló. Ui. az euklideszi tér felfogható mint speciális affin tér.

Végezetül kiegészítésként megemlítjük, hogy a kollineáció alaptétele két projektív sík között egy projektív leképezést, a hasonlóság alaptétele, illetve ennek a háromdimenziós euklideszi térre való kiterjesztett formája pedig két euklideszi sík között, illetve az euklideszi térnek önmagára való hasonlósági leképezésnek egy-egy megadását teszi lehetővé.

IRODALOM

[1] F. BACHMANN: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, SPRINGER-VERLAG, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959.
[2] H. S. M. COXETER: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
[3] HAJÓS GY.—STROHMAJER J.: A geometriai alapjai, Egyetemi jegyzet, 1970.
[4] RADÓ F., ORBÁN B.: A geometria mai szemmel, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1981.
[5] REIMAN I.: A geometria és határterületei, Gondolat. Budapest, 1986.

BEMERKUNGEN ZU DEN FUNDAMENTALSÄTZEN, DIE DIE MERKWÜRDIGEN ABBILDUNGEN EUKLIDISCHEN, AFFINEN UND PROJEKTIVEN DER RÄUME LIEFERN

JÓZSEF MISKOLCZI

In dieser Arbeit werden je eine Abbildung und je ein—in analoger Weise formulierter—Fundamentalsatz in dem euklidischen, affinen, bzw. projektiven Raum gegeben. Es wird auf die Möglichkeit der Beweise von geeigneten Fundamentalsätzen in der passenden Geometrie hingewiesen, ferner werden auch die Fundamentalsätze der affinen und projektiven Planimetrie bewiesen.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОСНОВАНОЙ ТЕОРЕМА ЕВКЛИДОВА, АФФИННОГО И ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВ, ОПОРНОЙ ДЛЯ ИХ ЗНАМЕНИТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

МИШКОЛЬЦИ, ЙОЖЕФ

Вводятся по — аналогичным друг другу — отображению и по основной теореме в каждом из евклидова, аффинного и проективного пространств. Указывается на возможность доказать основные теоремы опираясь лишь на средства геометрии соответствующего пространства. Изложено доказательство для случаев аффинной и проективной геометрий.